EDUCATUM - Journal of Science, Mathematics and Technology Vol.2 No.2 (2015) 19 - 26
ISSN 1985-7918

Pengekalan Bentuk Data dengan Menggunakan Fungsi Nisbah Bezier Kuadratik

Preserving Shape of Data by Using Rational Quadratic Bezier Function

Fauziah Othman dan Jamaludin Md. Ali
Pusat Pengajian Sains Matematik, Universiti Sains Malaysia,
11800 USM Pulau Pinang, Malaysia
e-mail: fauziahothman0487@yahoo.com, jamaluma@cs.usm.my

Abstrak

Untuk menggunakan sepenuhnya kelebihan yang terdapat pada fungsi nisbah Bezier kuadratik, maka kertas kerja ini akan mengemukakan suatu pendekatan inovatif bagi mengekalkan bentuk data dengan menggunakan fungsi ini. Penjanaan paparan lengkung yang kelihatan licin, menyenangkan dan menarik adalah antara fokus utama dalam kajian ini. Fungsi yang akan digunakan hanya mempunyai satu parameter bentuk, v_i sahaja bagi mengekang bentuk lengkung. Oleh itu, dua jenis parameter bentuk bebas, v_i akan diterbitkan bagi mendapatkan bentuk lengkung yang dapat melalui semua data dengan licin serta mengekalkan bentuk asas data dengan parameter bentuk pertama diterbitkan untuk menjana lengkung dengan keselanjaran darjah pertama. Manakala satu lagi parameter bentuk berikutnya diterbitkan untuk menjana lengkung yang dapat mengekalkan bentuk asas data iaitu kepositifan. Akhir sekali kertas kerja ini akan menjana lengkung yang dapat mengekalkan bentuk asas data dengan lebih licin dan menyenangkan berdasarkan parameter bentuk keselanjaran darjah pertama.

Kata kunci paparan data, fungsi nisbah Bezier kuadratik, pengekalan bentuk data

Abstract

In order to fully utilize the advantages of the rational quadratic Bezier function, this paper will present an innovative approach that will preserve the shape of the data by using this function. Generating the curve that displays smooth, pleasing and attractive are the main focus in this study. The function that will be used have only one shape parameters, v_i to constrain the curve shape. Hence, two types of free shape parameters, v_i will be derived to obtain the curve that can pass through all type of data with smooth and preserve the basic shape of data. The parameter of the first shape will be derived for the generating curve with first degree continuity. The parameter of the next shape will be derived to generate curves that preserve the basic properties of data which is positivity. Finally this paper will generate a more smoother and pleasant curve that can preserve the basic shape of data based on the parameters of the first degree continuity.

Keywords displays data, rational quadratic Bezier function, shape preserving of data

PENGENALAN

Pengekalan bentuk data merupakan salah satu kajian yang amat penting dalam bidang *Computer-Aided Geometric Design* (CAGD) dan komputer grafik. Ia juga merupakan satu

ISSN 1985-7918

kaedah yang membolehkan kita mengekalkan sifat data yang hendak diinterpolasi atau pun mendapatkan penghampiran bagi set data dengan mengekalkan sifat-sifat geometri yang dimiliki oleh data tersebut (Karim, 2008). Antara sifat utama data yang amat diperlukan dalam aplikasi adalah positif dengan menggunakan fungsi nisbah Bezier kuadratik.

Sejak kebelakangan ini kebanyakan penyelidik membincangkan mengenai pengekalan bentuk data dalam kertas kerja masing-masing. Sebagai contoh, Hussain et al. (2007) membincangkan mengenai pengekalan bentuk asas data dengan menggunakan fungsi nisbah kuadratik. Kertas ini akan membincangkan dengan lebih terperinci mengenai pengekalan bentuk melalui data yang diperolehi oleh Hussain et al. (2007) dengan menggunakan fungsi nisbah Bezier kuadratik.

Justeru, kajian ini akan menjana beberapa bentuk lengkung dengan menggunakan parameter bentuk bebas yang berbeza dengan Hussain et al. (2007) dan seterusnya membincangkan mengenai masalah pengekalan bentuk data. Kajian ini juga akan menggunakan satu parameter bentuk baru, iaitu parameter bentuk keselanjaran darjah pertama bagi mengekang lengkung positif. Sekaligus membuat perbandingan dan perbincangan mengenai bentuk lengkung yang dikekang dengan menggunakan parameter bentuk ini.

FUNGSI NISBAH BEZIER KUADRATIK

Dalam bahagian ini fungsi nisbah Bezier kuadratik akan diperkenalkan. Dengan mengandaikan data set berikut, $(x_i, y_i),\ i = 0,1,\ldots,n-1,$ dengan $x_0 < x_1 < ... < x_{n-1}$. Fungsi nisbah Bezier kuadratik $S_i(x)$ ditakrifkan dalam selang $[x_i, x_{i+1}]$ sebagai:

$$S_i\,(x) = \frac{p_i(t)}{q_i(t)}, \tag{2.1}$$

Dengan fungsi p dan q ialah,

$$p_i(t) = (1-t)^2 y_i + 2t(1-t)v_i h_i + t^2 y_{i+1},\quad q_i(t) = (1-t)^2 + 2t(1-t)v_i + t^2,$$

dengan nilai t ialah

$$t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i},\quad 0 \le t \le 1, \qquad h_i = \text{pemalar}$$

v_i ialah parameter bentuk. Fungsi nisbah Bezier kuadratik (2.1) mempunyai ciri-ciri seperti berikut:

$$S(x_i) = y_i,\quad S(x_{i+1}) = y_{i+1},\quad S^{(1)}(x_i) = m_i.$$

$S^{(1)}(x_i)$ ialah pembezaan bagi fungsi di persamaan (2.1) terhadap x_i dan m_i ialah nilai parameter terbitan bagi fungsi di persamaan (2.1) pada titik x_i. Kaedah yang akan digunakan untuk membezakan dan mendapatkan nilai parameter terbitan bagi fungsi di persamaan (2.1) akan dibincangkan kemudian.

ISSN 1985-7918

Keselanjaran Darjah Pertama Fungsi Nisbah Bezier Kuadratik

Keselanjaran merupakan antara faktor terpenting dalam penjanaan lengkung. Jika lengkung yang terhasil dapat melalui semua titik diberikan, maka lengkung tersebut telah memenuhi syarat keselanjaran tertentu. Contohnya seperti keselanjaran darjah pertama dan keselanjaran darjah kedua. Tetapi bahagian ini hanya akan mengkaji mengenai keselanjaran darjah pertama sahaja, iaitu untuk menerbitkan kekangan yang perlu dipenuhi oleh fungsi dalam persamaan (2.1) bagi mencapai keselanjaran darjah pertama. Fungsi nisbah Bezier kuadratik akan kekal selanjar darjah pertama, C^1 jika syarat seperti berikut diterapkan:

$$S^{(1)}(x_i) = m_i, \tag{2.2}$$

$$S^{(1)}(x_{i+1}) = m_{i+1}. \tag{2.3}$$

Bagi memastikan fungsi dalam persamaan (2.1) memenuhi syarat keselanjaran darjah pertama, maka fungsi dalam persamaan (2.1) akan dibezakan terhadap x terlebih dahulu. Pembezaan fungsi persamaan (2.1) terhadap x adalah seperti berikut:

$$S^{(1)}(x) = \frac{m_i(1-t)^2 + 2\Delta \ (1-t)t + (2v_i\Delta_i - m_i)t^2}{\left\{1 + \left(2v_i - 2\right)t\left(1-t\right)\right\}^2} \tag{2.4}$$

dengan nilai $t = \dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$ di mana $0 \le t \le 1$.

Seterusnya nilai $x = x_i$ i.e $t = 0$ akan digantikan ke dalam persamaan (2.4), maka $S^{(1)}(x_i)$ menjadi seperti berikut:

$$S^{(1)}(x_i) = m_i.$$

Jadi fungsi di persamaan (2.1) telah memenuhi persamaan (2.2). Kemudian nilai $x = x_{i+1}$ i.e $t = 1$ akan digantikan ke dalam persamaan (2.4), maka $S^{(1)}(x_{i+1})$ menjadi seperti berikut:

$$S^{(1)}(x_{i+1}) = 2v_i\Delta_i - m_i. \tag{2.5}$$

Kemudian persamaan (2.5) dan persamaan (2.3) akan disamakan.

$$2v_i\Delta_i - m_i = m_{i+1},$$

$$v_i = \frac{m_i + m_{i+1}}{2\Delta_i}. \tag{2.6}$$

Seterusnya persamaan (2.6) akan digantikan ke dalam persamaan (2.5). Maka persamaan (2.5) akan menjadi seperti berikut:

EDUCATUM - Journal of Science, Mathematics and Technology Vol.2 No.2 (2015) 19 - 26
ISSN 1985-7918

$$S^{(1)}(x_{i+1}) = 2v_i\Delta_i - m_i\,,$$

$$S^{(1)}(x_{i+1}) = 2(\frac{m_i + m_{i+1}}{2\Delta_i})\Delta_i - m_i\,.$$

Dengan meringkaskan persamaan di atas, maka nilai $S^{(1)}(x_{i+1}) = m_{i+1}$. Seterusnya terbuktilah bahawa fungsi dalam persamaan (2.1) telah mencapai keselanjaran darjah pertama, C^1 dengan memenuhi syarat (2.2) dan (2.3).

Teorem 1: Fungsi nisbah Bezier kuadratik (2.1) akan kekal selanjar dengan darjah pertama jika dan hanya jika nilai v_i bagi fungsi di persamaan (2.1) memenuhi syarat bagi persamaan (2.6).

Penentuan Parameter Terbitan

Dalam kebanyakan aplikasi, nilai parameter terbitan m_i tidak diberikan dan mesti ditentukan sama ada daripada data yang diberikan atau dengan menggunakan beberapa teknik lain. Dalam kajian ini, nilai parameter terbitan, m_i dihitung daripada data $(x_i, y_i), i = 0,1,...,n-1$ yang diberikan bagi memastikan lengkung kekal licin dengan keselanjaran darjah pertama. Kaedah ini adalah penghampiran berdasarkan pelbagai teori matematik. Penerangan mengenai kaedah yang akan digunakan untuk menentukan nilai parameter terbitan dalam kajian ini adalah seperti berikut.

Kaedah Aritmetik Min

Kaedah aritmetik min merupakan kaedah penghampiran perbezaan tiga titik yang berdasarkan manipulasi aritmetik. Kajian ini akan menggunakan kaedah aritmetik min yang dipetik dari (Hussain & Ali, 2004) dan ia ditakrifkan seperti berikut:

$$m_i = \begin{cases} 0, \text{jika } \Delta_i = 0 \text{ atau } \Delta_{i-1} = 0 \\ \dfrac{h_{i-1}\Delta_i + h_i\Delta i - 1}{h_{i-1} + h_i},\ i = 1,2,...,n-2 \end{cases} \tag{2.7}$$

Dan syarat pada titik akhir ditakrifkan sebagai:

$$m_0 = m_0^* = \begin{cases} 0, \text{jika } \Delta_0 = 0 \text{ atau simbol } (m_0^*) \neq \text{simbol } (\Delta_0) \\ \Delta_0 + \left(\Delta_0 - \Delta_1\right)\left(\dfrac{h_0}{h_0 + h_1}\right) \end{cases} \tag{2.8}$$

ISSN 1985-7918

dan

$$m_{n-1} = m_{n-1}^{*} = \begin{cases} 0, \text{ jika } \Delta_{n-2} = 0 \text{ atau simbol } (m_{n-1}^{*}) \neq \text{simbol } \left(\Delta_{n-2}\right) \\ \Delta_{n-2} + \left(\Delta_{n-2} - \Delta_{n-3}\right)\left(\dfrac{h_{n-2}}{h_{n-2} + h_{n-3}}\right) \end{cases} \tag{2.9}$$

dengan nilai bagi Δ_i adalah seperti berikut:

$$\Delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad h_i = x_{i+1} - x_i, i = 0,1,2,....,n-1.$$

FUNGSI NISBAH BEZIER KUADRATIK POSITIF

Fungsi nisbah Bezier kuadratik (2.1), yang diterangkan di dalam bahagian sebelum ini, adalah suatu persamaan umum dan masih mempunyai kekurangan dalam isu pengekalan bentuk positif. Jadi untuk menjadikan fungsi di persamaan (2.1) dapat mengekalkan bentuk positif, langkah-langkah berikut dipertimbangkan:-

Pertama sekali data set berikut akan dipertimbangkan, $(x_i, y_i), (x_i, y_i), i = 0,1,...,n-1$ dengan $y_0 > 0, y_1 > 0,..., y_{n-1} > 0$. Lengkung $S(x)$ adalah positif pada keseluruhan selang jika

$$S(x) > 0 \quad \forall x_0 \le x \le x_{n-1}.$$

Fungsi di persamaan (2.1) akan kekal positif jika $p(t)$ dan $q(t)$ adalah positif,

$$S(x) = \frac{p(t) > 0}{q(t) > 0} \Rightarrow S(x) > 0.$$

Bagi menjadikan fungsi di persamaan (2.1) kekal positif, maka pertimbangan ke atas persamaan $p(t)$ dan $q(t)$ perlu dilakukan. Maka $q(t)$ akan dipertimbangkan dahulu. Fungsi di persamaan (2.1) akan kekal positif jika dan hanya jika pembawah di persamaan (2.1) positif.

$$q_i(t) = (1-t)^2 + 2t(1-t)v_i + t^2,$$

dan $q(t)$ akan positif jika:

$$v_i > -1.$$

Seterusnya fungsi di persamaan (2.1) akan terus kekal positif hanya jika pengangka di persamaan (2.1) positif

$$p_i(t) = (1-t)^2 y_i + 2t(1-t)v_i h_i + t^2 y_{i+1}.$$

ISSN 1985-7918

Manakala $p(t)$ akan positif jika

$$v_i > \frac{-m_i(x_{i+1} - x_i)}{2y_i}.$$

Oleh itu, $S(x)$ akan kekal positif jika dan hanya jika

$$v_i > Max\{-1, \frac{-m_i(x_{i+1} - x_i)}{2y_i}\}. \tag{3.1}$$

Teorem 2: Fungsi nisbah Bezier kuadratik yang diberikan dalam persamaan (2.1) akan kekal positif dalam selang $[x_i, x_{i+1},]\ i = 0,1,\ldots,n-1$ jika dan hanya jika v_i memenuhi persamaan (3.1).

Persamaan (3.1) boleh disusun semula sebagai:

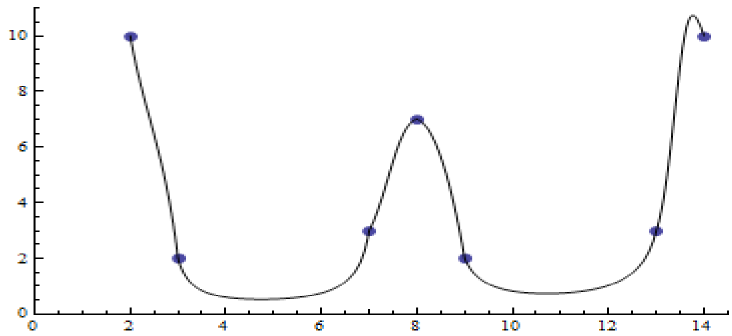
$$v_i = l_i + Max\{-1, \frac{-m_i(x_{i+1} - x_i)}{2y_i}\}, \text{dengan } l_i > 0.$$

Penjanaan Lengkung Positif

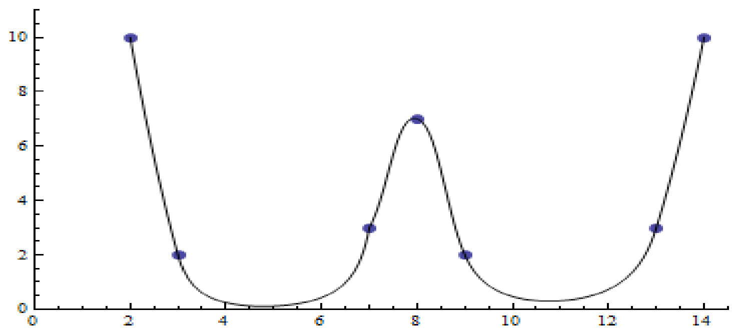
Berdasarkan data positif daripada Jadual 1, dua lengkung akan dijana dengan menggunakan fungsi di persamaan (2.1). Data positif ini merupakan data yang diambil dari kertas kerja (Hussain et al., 2007). Tujuan penjanaan bagi kedua-dua lengkung ini adalah untuk menghasilkan suatu lengkung yang dapat mengekalkan bentuk asal data, iaitu positif.

Jadual 1 Data positif.

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	2	3	7	8	9	13	14
y_i	10	2	3	7	2	3	10



(a)



(b)

Rajah 1 (a) Lengkung positif bagi fungsi nisbah Bezier kuadratik berdasarkan rumus parameter bentuk di persamaan (3.1) dan (b) Lengkung positif bagi fungsi nisbah Bezier kuadratik berdasarkan rumus parameter bentuk di persamaan (2.6).

Lengkung dalam Rajah 1(a) dikekang dengan menggunakan rumus parameter bentuk yang diterbitkan di persamaan (3.1) di mana parameter bentuk ini diterbitkan untuk menjadikan fungsi nisbah Bezier kuadratik kekal positif. Maka penjanaan lengkung dengan menggunakan kekangan parameter bentuk ini telah menghasilkan lengkung yang dapat mengekalkan bentuk positif dengan licin. Manakala Rajah 1(b) menunjukkan lengkung yang dikekang berdasarkan rumus parameter bentuk di persamaan (2.6). Iaitu parameter bentuk yang diterbitkan untuk menjadikan fungsi di persamaan (2.1) kekal selanjar darjah pertama. Ternyata penggunaan rumus parameter bentuk ini memberikan satu hasil lengkung yang lebih baik dan licin berbanding lengkung dalam Rajah 1(a) di samping dapat mengekalkan bentuk asal data dengan paparan lengkung yang menyenangkan.

KESIMPULAN DAN CADANGAN

Secara keseluruhannya didapati penjanaan lengkung bagi fungsi nisbah Bezier kuadratik dengan menggunakan kekangan parameter bentuk keselanjaran darjah pertama lebih menjadi tumpuan daripada kekangan parameter bentuk asas data. Hal ini disebabkan oleh kekangan tersebut bukan sahaja dapat memastikan lengkung boleh melalui semua titik dengan lebih licin, malah dapat mengekalkan bentuk asal data dengan keselanjaran darjah pertama dan fleksibel untuk diaplikasikan kepada data lain. Penjanaan lengkung dengan menggunakan kekangan parameter bentuk keselanjaran darjah pertama diharap dapat diaplikasikan terhadap data-data akan datang untuk mendapatkan paparan lengkung yang menyenangkan selain daripada dapat mengekalkan bentuk asas data.

RUJUKAN

Hussain, M.Z & Ali, J.M. (2004). *Visualizing positive pata by rational quadratic curve*. Simposium Kebangsaan Sains Matematik ke 12, 2004.

Hussain, M.Z., Ayub, N. & Irshad, M. (2007). Visualization of 2D data by rational quadratic function. *Journal of Information and Computing Science*, *Vol. 2*, No. 1, 17-26.

Karim, S. A. A. (2008). *Fungsi ball teritlak nisbah untuk lengkung interpolasi cembung dan berekanada*. (Master Tesis online, Universiti Sains Malaysia, 2008). Retrieved from World Wide Web: http://eprints.usm.my.