

RESEARCH PAPER

Pembinaan Lengkungan Peralihan Berbentuk C yang Memuaskan Data Interpolasi Hermite G^2

Constructing C-shape transition curve that satisfy G^2 Hermite Interpolation Data

Azhar Ahmad*

Department of Mathematics, Faculty of Science and Mathematics, Universiti Pendidikan Sultan Idris,
35900 Tanjong Malim, Perak, Malaysia

*Corresponding author: azhar.ahmad@fsmt.upsi.edu.my

DOI: <https://doi.org/10.37134/jsml.vol8.2.6.2020>

Received: 24 October 2019; Accepted: 20 March 2020; Published: 7 April 2020

Abstrak

Makalah ini membincangkan satu kaedah pembinaan lengkungan peralihan berbentuk C yang memenuhi syarat-syarat data interpolasi Hermite G^2 . Lengkungan peralihan ini dibina berdasarkan gabungan dua pilin kuadratik nisbah Bezier atau gabungan bersama satu segmen garis lurus bagi mencapai keselantaran G^1 pada keseluruhan binaan. Kaedah analisis geometri bersama syarat kemonotonan suatu lengkungan kuadratik nisbah Bezier telah digunakan bagi mencapai objektif kajian. Hasil kajian yang dicapai adalah satu teknik pembinaan yang membolehkan kita memperoleh lengkungan peralihan secara terus, mudah diaplikasikan serta tanpa perlu menggunakan sebarang prosedur transformasi affin. Syarat untuk lengkungan peralihan ini terhasil ditentukan oleh data Hermite G^2 yang diberi dan kepelbagaiannya pula dikawal oleh panjang segmen garis lurus yang menghubungkan kedua-dua pilin berkenaan. Keupayaan memenuhi sifat-sifat interpolasi ini memberi banyak kelebihan dan amat sesuai untuk aplikasi tertentu di dalam CAGD (*Computer Aided Geometric Design*), umpamanya rekabentuk produk industri, trajektori robot non-holonomic, serta rekabentuk mendatar landasan keretapi dan lebuh raya. Oleh kerana kuadratik nisbah Bezier merupakan sebahagian daripada perwakilan NURBS (*Nonuniform Rational B-splines*) maka adalah mudah bagi kita mengabungjalinkan formulasi lengkungan peralihan yang dicadangkan ini ke dalam kebanyakan sistem pengaturcaraan CAD (*Computer Aided Design*).

Kata kunci: Lengkungan peralihan; kuadratik nisbah Bezier; keselantaran geometri

Abstract

This paper discusses a method of construction of C -shaped transition curves that meets the requirements of the G^2 Hermite interpolation data. The transition curves are based on a combination of two rational quadratic Bezier spiral or a combination with a straight line segment to achieve G^1 continuity throughout the construction. Geometrical analysis methods together with the monotonicity condition of a rational quadratic Bezier curve was applied to achieve the objectives of the study. The results of this study are a construction technique that enables us to obtain transitional curves directly, easily applied and without the use of any affine transformation procedure. The conditions for this transition curves are determined by the given G^2 Hermite data and their diversity is controlled by the length of the straight line segment connecting the two spirals. The ability to meet these interpolation properties provides many advantages and is well suited for specific applications in CAGD (*Computer Aided Geometric Design*), such as industrial product design, non-holonomic robot trajectories, and horizontal railway and highway design. Since Bezier's quadratic equation is part of the NURBS representation (*Nonuniform Rational B-splines*), it is easy for us to integrate the proposed transition curves into most CAD (*Computer Aided Design*) systems.

Keywords: Transitional curves; rational quadratic Bezier; geometric continuity

PENGENALAN

Lengkungan peralihan boleh digambarkan sebagai lengkungan yang menghubungkan antara dua titik berasingan pada objek-objek geometri yang asas, seperti titik, garisan dan bulatan. Ciri-ciri lengkungan peralihan biasanya dirujuk kepada bentuk yang dibina, berbentuk C , berbentuk S atau berbentuk J (Ziatdinov et al., 2012). Ia juga diklasifikasikan dengan darjah keselantaran fungsi C^n atau keselantaran geometri G^n yang dimiliki apabila berlaku gabungan dua atau lebih lengkungan. Notasi G^2 memberi maksud keselantaran geometri berdarjah dua di mana dua lengkungan disambung pada satu titik, mempunyai vektor unit tangen serta kelengkungan yang sama.

Lengkungan peralihan diketahui amat berguna untuk pelbagai aplikasi tertentu di dalam CG (*Computer Graphics*) dan CAD. Ia dilihat penting untuk memenuhi kehendak reka bentuk sesuatu produk bagi menepati fungsinya dan juga sebahagian daripada elemen untuk meningkatkan keestetikaan sesuatu produk. Suatu lengkungan peralihan yang memiliki kesinambungan yang licin di titik hubungan serta kelengkungan extrema yang terkawal mampu memberikan gambaran visual yang menarik. Merujuk kepada penggunaan lengkungan peralihan pula, terdapat usaha yang aktif direkodkan seperti di dalam reka bentuk mendatar lebuhraya, landasan keretapi dan trajektori kenderaan/robot terkawal (Kobryń dan Stachera, 2019; Zboinski dan Woźnica, 2019). Penggunaan lengkungan peralihan yang licin mampu menghindarkan perubahan kelengkungan mendadak, ini menjadikannya lebih mudah diterima oleh ahli sains dan jurutera (Fritsch dan Carlson, 1980). Antara lain, kita juga boleh menemui penggunaannya pada pembinaan fon serta selanjutnya menghasilkan permukaan yang licin untuk rekabentuk animasi. Oleh itu, keselantaran pada profil kelengkungan menjadi penunjuk utama bagi menilai keestetikaan sesuatu lengkungan peralihan.

Terdapat beberapa kajian berkenaan lengkungan peralihan berkelengkungan monoton apabila dua titik lokasi berbeza diberi. Pilin Clothoid atau Cornu adalah satu contoh lengkungan yang mempunyai kelengkungan yang monoton secara linear dengan panjang lengkung. Ia secara tradisional telah digunapakai sebagai lengkungan peralihan dalam reka bentuk lebuhraya semenjak bertahun-tahun dulu (Walton dan Meek, 1996; Abramov et al., 2017). Namun kegagalannya untuk diwakili oleh perwakilan NURBS menjadi ia tidak dapat digunakan dengan mudah dalam kebanyakan pakej pengaturcaraan grafik yang standard (Alexandrov, 2006). Sebagai alternatif, banyak penyelidik menganjurkan penggunaan perwakilan lengkungan Bézier yang berdarjah rendah seperti kuadratik, kubik dan kuartik, bagi kawalan kelengkungan monoton untuk tujuan itu. Penggunaan titik kawalan yang sedikit sejajar dengan darjah lengkungan sudah memadai untuk kita memperolehi bentuk pilin dengan satu kelengkungan bernilai sifar pada satu hujung. Manakala penjana Bezier yang berdarjah tinggi memerlukan analisis yang lebih kompleks serta sukar untuk mencapai pengawalan kelengkungan sesuatu lengkungan dengan baik. Pembaca yang berminat digalakkan merujuk kepada hasil kajian Walton dan Meek (1996, 1998, 2007), Habib dan Sakai (2003, 2007, 2009), Li et al. (2006), Yahaya et al. (2008), dan Ahmad dan Ali (2010, 2013).

Selain itu penggunaan perwakilan nisbah Bezier juga boleh memberikan hasil yang serupa malah memiliki lebih keupayaan dalam mengawal bentuk sesuatu lengkungan. Lengkungan nisbah Bézier adalah khas daripada NURBS yang mempunyai pemberat-pemberat boleh laras yang amat sesuai digunakan untuk proses penghampiran kepada bentuk-bentuk geometri yang pelbagai. Perwakilan kuadratnya mampu membina bentuk-bentuk keratan kon secara tepat. Oleh yang demikian ia menjadi lebih popular serta penting dalam pembinaan lengkungan dan permukaan dalam CAD/CAM (*Computer aided manufacturing*).

Perbincangan mengenai analisis kelengkungan dan penggunaan lengkung nisbah Bézier berdarjah rendah boleh dirujuk dalam kajian-kajian berikut; Sapidis dan Frey (1992) memberi formula untuk mencari kelengkungan maksimum bagi lengkung kuadratik nisbah Bézier. Ahn dan Kim (1998) memperoleh pencerian yang lebih lengkap berkaitan dengan kelengkungan extrema dan kemonotonan. Suenaga dan Sakai (1999) mencadangkan syarat-syarat yang perlu dan mencukupi untuk lengkung kuadratik nisbah Bézier untuk menjadi pilin atau mempunyai ekstrema tempatan melalui analisis pembezaan dan pertunjuk Descartes. Selain itu, analisis yang dilakukan oleh Frey dan Field (2000) menunjukkan bahawa jika titik akhir dan pemberat ditetapkan, segmen keratan kon sentiasa diperolehi jika dan hanya jika titik kawalan lain terletak di dalam kawasan yang ditentukan oleh satu sempadan khas berbentuk bulatan. Kaedah interaktif mencari padanan lengkung yang saksama merujuk kepada data Hermite G^2 telah dibincangkan oleh Walton dan Meek (2013). Mereka berjaya menyediakan beberapa teorem yang memperjelaskan kedudukan titik kawalan akhir yang menjamin lengkung monoton (menyusut atau menokok) diperolehi. Dalam kajian seterusnya, Ahmad dan Gobithaasan (2018) menyediakan beberapa teorem yang berkaitan kemonotonan kelengkungan dengan kawalan pemberat pertengahan serta poligon kawalan yang dipengaruhi oleh sudut putaran.

Fokus utama makalah ini adalah untuk membangunkan algoritma mudah bagi membina lengkung peralihan daripada perwakilan kuadratik nisbah Bezier apabila satu set data Hermite G^2 diberi. Gabungan dua pilin kuadratik nisbah dan gabungan bersama satu segmen garis lurus digunakan untuk mencapai matlamat ini. Syarat-syarat pembinaan lengkung peralihan berbentuk C akan disimpulkan dalam bentuk selang bagi nisbah panjang segmen garis pada polygon kawalan yang mudah difahami oleh pengguna.

BEBERAPA NOTASI UMUM DAN KETETAPAN

Semua titik kedudukan dan vektor pada satah telah diwakilkan dengan huruf besar secara condong. Notasi seperti $X(t)$ mewakili fungsi nilai vektor. Operasi vektor yang digunapakai dalam kajian ini adalah hasildarab dot antara vektor A dan B ditulis sebagai $A \bullet B$, manakala $A \wedge B$ pula adalah hasildarab pangkah (outer product). Kedua-dua hasildarab ini memberi nilai skalar dan masing-masing diselesaikan dengan persamaan $A \bullet B = \|A\| \|B\| \cos \omega$ dan $A \wedge B = \|A\| \|B\| \sin \omega$. Sudut ω adalah sudut putaran antara vektor A kepada vektor B , ia bernilai positif jika dihitung mengikut putaran lawan jam manakala bernilai negatif apabila sebaliknya. Manakala $\|A\|$ pula adalah panjang vektor A .

LENGKUNGAN KUADRATIK NISBAH BÉZIER

Biar kita andaikan $\Upsilon(t)$ sebagai lengkung kuadratik nisbah Bézier dalam bentuk piawai dengan titik-titik kawalan $P_i \in \mathbb{R}^2$ dan pemberat pertengahan $w \in \mathbb{R}$, ia dibina dengan parameter tempatan t sebagai (Farin 2014),

$$\Upsilon(t) = \frac{(1-t)^2 P_0 + 2(1-t)twP_1 + t^2 P_2}{1 - 2t + 2(1-t)tw}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1)$$

Persamaan bentuk piawai ini dikenali juga sebagai perwakilan untuk segmen keratan kon dan dapat dikategorikan menurut Lee (1987) seperti berikut; Apabila $w < 1$, segmen tersebut adalah elips, ia adalah segmen parabola apabila $w = 1$ serta ia adalah segmen hipebola jika $w > 1$. Arka bulat boleh dibentuk apabila $w = \cos(\omega/2)$ dengan poligon kawalan $P_0P_1P_2$ adalah berbentuk segitiga kaki sama dengan P_0P_2 sebagai dasarnya. Sudut $\omega \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ merupakan sudut putaran dapat ditentukan dengan mudah melalui

$$\omega = \cos^{-1} \frac{(P_1 - P_0) \cdot (P_2 - P_1)}{\|P_1 - P_0\| \|P_2 - P_1\|} . \quad (2)$$

Akhirnya, persamaan (1) adalah suatu segmen pilin jika ia memuaskan teorem berikut.

Teorem: Pertimbangkan suatu lengkungan kuadratik nisbah Bézier sebagaimana diberi oleh (1). Jika diandaikan jarak di antara dua titik kawalan berturutan ditandakan sebagai $a = \|P_1 - P_0\|$, $b = \|P_2 - P_1\|$ dan nisbah $m = b/a$. Dengan menggunakan notasi $w_L = \frac{\sqrt{1 + m \cos \omega}}{\sqrt{2}}$ dan $w_U = \frac{\sqrt{m + \cos \omega}}{\sqrt{2} \sqrt{m}}$, dengan $\omega \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ adalah sudut putaran vektor $P_1 - P_0$ kepada $P_2 - P_1$. Jika $w_L < w < w_U$ apabila $0 < m < 1$, maka kelengkungan bagi lengkungan kuadratik nisbah Bézier adalah monoton secara menokok. Manakala apabila $w_U < w < w_L$ ketika $m > 1$, maka kelengkungan adalah monoton secara menyusut.

Bukti teorem di atas boleh dirujuk kepada Ahmad dan Gobithason (2018).

Bagi tujuan membina lengkungan peralihan yang licin, pertamanya kita perlu memberi tumpuan pada kelengkungan suatu lengkungan. Aspek kelengkungan menjadi kayu pengukur yang penting untuk menentukan kelicinan suatu lengkungan atau permukaan yang mana ia adalah konsep yang terbina di dalam bidang Geometri Pembezaan untuk ruang $\square^j, j = 2, 3$. Kelengkungan bagi lengkungan berparameter $\Upsilon(t)$ ditakrifkan sebagaimana berikut

$$\kappa(t) = \frac{\Upsilon'(t) \wedge \Upsilon''(t)}{\|\Upsilon'(t)\|^3} \quad (3)$$

Di mana $\Upsilon'(t)$ dan $\Upsilon''(t)$ masing-masing adalah terbitan pertama dan kedua bagi $\Upsilon(t)$. Tandaan positif dan negatif bagi $\kappa(t)$ menentukan arah belokan bagi sesuatu lengkungan itu. Nilai positif menggambarkan lengkungan membelok ke kiri manakala nilai negatif adalah sebaliknya. Seterusnya kelengkungan pada titik hujung bagi suatu lengkungan kuadratik nisbah Bézier diperolehi mengikut Sederberg (2012) sebagai

$$\kappa(0) = \frac{m \sin \omega}{2w^2 a}, \quad \text{dan} \quad (4)$$

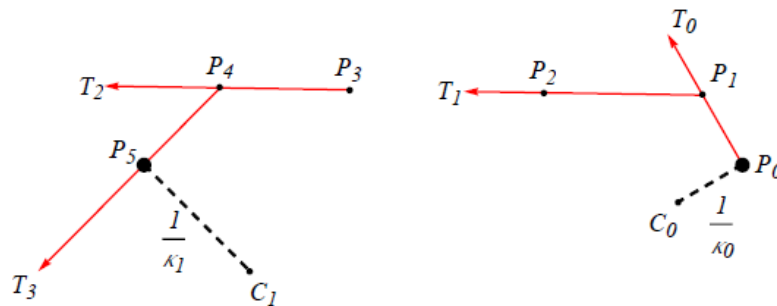
$$\kappa(1) = \frac{\sin \omega}{2w^2 m^2 a}. \quad (5)$$

PEMBINAAN LENGKUNGAN PERALIHAN BENTUK C

Di dalam seksyen ini, langkah-langkah yang telah diambil bagi membina satu lengkungan peralihan berbentuk C yang memuakan syarat data Hermite G^2 yang diberi akan dibincangkan. Pada umumnya lengkungan peralihan ini akan melibatkan gabungan dua pilin kuadratik nisbah Bezier atau gabungan bersama satu segmen garis lurus dengan berkeselajaran G^1 . Limitasi ini disebabkan oleh kegagalan semulajadi lengkungan kuadratik untuk memiliki kelengkungan sifar pada mana-mana titik pada lengkungan tersebut ketika mana titik-titik kawalan dalam keadaan tak kolinear. Berikut adalah satu pernyataan masalah bagi memberi penjelasan yang tepat berkenaan penyelesaian yang ingin dicari.

Diberi suatu data Hermite G^2 iaitu dua set terdiri daripada vektor kedudukan, vektor unit tangen dan nilai kelengkungan. Bina satu lengkungan peralihan berbentuk C dengan menggunakan gabungan dua pilin kuadratik nisbah Bezier atau gabungan dua pilin bersama satu segmen garis.

Langkah pertama, biar kita simbolkan data Hermite G^2 yang diberi sebagai $\{P_0, T_0, \kappa_0\}$ dan $\{P_5, T_3, \kappa_1\}$. Titik kawalan bagi dua lengkung kuadratik nisbah Bezier yang digunakan diwakili dengan $\{P_0, P_1, P_2\}$ dan $\{P_3, P_4, P_5\}$ dengan $P_i, i=1,2,3,4$ tidak diketahui. Pembinaan lengkungan peralihan berbentuk C berorientasikan kelengkungan yang positif dengan lengkungan bermula daripada titik P_0 dan berakhir pada titik P_5 telah ditunjukkan pada Rajah 1. Rajah 1 menggambarkan kedudukan data yang diberi dan titik-titik kawalan yang terlibat. Di sini T_1 dan T_2 masing-masing adalah vektor tangen unit mengikut arah vektor $P_1 - P_0$ dan $P_4 - P_3$, di mana nilai-nilainya akan ditentukan kemudian.



Rajah 1. Kedudukan data Hermite dan titik-titik kawalan yang terlibat.

Titik-titik C_0 dan C_1 adalah pusat bulatan oksilasi dan masing-masing adalah $\frac{1}{\kappa_0}$ dan $\frac{1}{\kappa_1}$.

Untuk kajian ini, pembinaan boleh dilakukan jika hanya hubungan vektor-vektor unit tangen memenuhi syarat berikut

$$0 \leq T_0 \cdot T_1 = \cos \theta, \quad T_0 \wedge T_1 = \cos \theta \leq 1 \quad \text{dan} \quad 0 \leq T_1 \cdot T_3 = \cos \phi, \quad T_1 \wedge T_3 = \cos \phi \leq 1. \quad (6)$$

Di mana sudut putaran antara T_0 kepada T_1 dan T_2 kepada T_3 masing-masing adalah $0 \leq \theta, \phi \leq \pi/2$, dengan $\theta = \cos^{-1} T_0 \cdot T_1$ dan $\phi = \cos^{-1} T_2 \cdot T_3$. Untuk mengelakkan satu bulatan oksilasi berada sepenuhnya di dalam satu bulatan oksilasi yang lainnya maka syarat berikut diperlukan

$$\|C_1 - C_0\| > \left| \frac{1}{\kappa_1} - \frac{1}{\kappa_0} \right|. \quad (7)$$

Langkah kedua, biarkan kita tulis persamaan bagi lengkungan peralihan yang ingin dibina sebagai gabungan $Z = \{Z_0, Z_1, Z_2\}$. Di mana ia terdiri daripada Z_0 iaitu pilin berkelengkung menokok, Z_1 adalah segmen garis lurus dan Z_2 pula pilin berkelengkungan menyusut. Kesemua persamaan polinomial berparameter ini dijana dengan parameter $t \in [0, 1]$. Formula yang berkaitan adalah seperti berikut,

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{(1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1w_0 + t^2P_2}{(1-t)^2 + 2(1-t)tw_0 + t^2} \\ Z_1 &= (1-t)P_2 + tP_3 \\ Z_2 &= \frac{(1-t)^2 P_3 + 2(1-t)tP_4w_1 + t^2P_5}{(1-t)^2 + 2(1-t)tw_1 + t^2} \end{aligned} \quad (8)$$

Seterusnya kita mulakan pembina pilin pertama Z_0 dengan menentukan pusat bulat oksilasi C_0 berjejari $1/\kappa_0$ daripada $\{P_0, T_0, \kappa_0\}$, bersama dengan T_0 dan vektor unit normalnya N_0 . Kedudukan N_0 dalam koordinat satah ditetapkan di sebelah kiri T_0 dengan $T_0 \square N_0 = 0$. Jadi hasilnya adalah $C_0 = P_0 + \frac{1}{\kappa_0} N_0$. Dengan cara yang sama, untuk pilin kedua Z_2 kita perlukan bulatan oksilasi C_1 berjejari $1/\kappa_1$, manakala N_3 sebagai vektor unit normal bagi T_3 . Kesemuanya dimanipulasi daripada $\{P_5, T_3, \kappa_1\}$ dan memberi kita $C_1 = P_5 + \frac{1}{\kappa_1} N_3$.

Langkah selanjutnya, untuk kita membina lengkungan dengan titik kawalan $\{P_0, P_1, P_2\}$ dan $\{P_3, P_4, P_5\}$ sebagai suatu pilin, maka kita dikehendaki mematuhi syarat kemonotonan lengkungan kuadratik nisbah menggunakan teorem yang diberikan dalam seksyen sebelum ini. Untuk lengkungan Z_0 monoton secara menokok, kita boleh pastikan ia sedemikian rupa dengan memilih $w_1 = w_U$ iaitu pemberat pada nilai yang paling minimum. Maka kita boleh tulis kembali titik kawalan dan pemberat sebagai

$$\{P_0, P_1 = P_0 + a_0T_0, P_2 = P_1 - b_0T_1\}, \quad (9)$$

$$w_1 = \frac{\sqrt{m_0 + \cos \theta}}{\sqrt{2}\sqrt{m_0}}, \quad (10)$$

di mana

$$a_0 = \|P_1 - P_0\|, b_0 = \|P_2 - P_1\|, m_0 = \frac{b_0}{a_0} > 1. \quad (11)$$

Dan vektor-vektor unit tangen terlibat adalah

$$T_0 = \frac{1}{a_0}(P_1 - P_0), \quad T_1 = \frac{1}{b_0}(P_2 - P_1). \quad (12)$$

Daripada (4), dengan kelengkungan κ_0 yang diberi maka a_0 dan b_0 boleh ditulis sebagai

$$a_0 = \frac{m_0 \sin \theta}{2w_1^2 \kappa_0}, \quad b_0 = m_0 a_0. \quad (13)$$

Manakala untuk Z_2 pula, ia perlu monoton secara menyusut maka kita memilih pemberat pada nilai yang paling minimum iaitu apabila $w_2 = w_L$ dengan tiga titik kawalan dan pemberat boleh ditulis sebagai

$$\{P_3 = P_4 - a_1 T_2, \quad P_4 = P_5 - b_1 T_3, \quad P_5\}, \quad (14)$$

$$w_2 = \frac{\sqrt{1 + m_1 \cos \phi}}{\sqrt{2}} \quad (15)$$

Di mana

$$a_1 = \|P_4 - P_3\|, \quad b_1 = \|P_5 - P_4\|, \quad 0 < m_1 = \frac{b_1}{a_1} < 1. \quad (16)$$

Serta vektor unit tangen adalah

$$T_2 = \frac{1}{a_1}(P_4 - P_3), \quad T_3 = \frac{1}{b_1}(P_5 - P_4). \quad (17)$$

Daripada (5) pula, b_1 dan a_1 boleh ditulis sebagai

$$b_1 = \frac{\sin \phi}{2m_1 w_2^2 \kappa_1}, \quad a_1 = \frac{b_1}{m_1} \quad (18)$$

Pada ketika ini kedua-dua Z_0 dan Z_2 masih terasing dan tidak berhubung sebagai satu lengkungan yang selanjat. Maka bagi menghubungkan kedua-duanya kita boleh menggunakan satu segmen garis Z_1 yang menghubungkan P_2 dan P_3 . Bagi memuaskan G^1 pada lengkungan peralihan, kita perlukan kedudukan P_1, P_2, P_3 dan P_4 yang kolinear iaitu dengan menetapkan $T_1 = T_2$. Jadi T_1 boleh ditulis sebagai berikut dgn $\gamma = \|P_3 - P_2\|$,

$$T_1 = \frac{1}{\gamma}(P_3 - P_2) \quad (19)$$

Melalui gantian (13) kepada (9), (18) kepada (14) dan hasil kedua-duanya pula dimasukkan ke dalam (19). Kita akan perolehi persamaan berikut

$$(P_5 - P_0) - \frac{\eta_1}{m_1^2(1 + m_1 \lambda_1)}(T_1 + m_1 T_3) - \frac{m_0^2 \eta_2}{(\lambda_2 + m_0)}(T_0 + m_0 T_1) = \gamma T_1 \quad (20)$$

Di mana

$$\lambda_1 = \cos \phi, \quad \lambda_2 = \cos \theta, \quad \eta_1 = \frac{\sin \phi}{\kappa_1}, \quad \eta_2 = \frac{\sin \theta}{\kappa_0}. \quad (21)$$

Kita telah berjaya mendapat satu hubungan unik untuk memastikan lengkung peralihan terbina, sekarang adalah penting bagi kita menentukan T_1 yang sesuai. Pada umumnya T_1 bebas dipilih dengan syarat ia memuaskan syarat yang diberikan pada (6). Di sini pertimbangan adalah T_1 yang paling sesuai iaitu vektor yang selari dengan tangen sepunya bagi kedua-dua bulatan berpusat di C_0 dan C_1 . Vektor ini bukan sahaja jelas mematuhi syarat di atas, malah T_1 ini mempunyai kelebihan seperti boleh menjadi garis lurus yang menghubungkan dua segmen lengkung bulatan apabila kita menggunakan $m_0 = m_1 = 1$.

Menggunakan gambaran geometri sebagaimana yang ditunjukkan Rajah 1. Kita boleh mendapatkan T_1 melalui langkah-langkah berikut. Dengan kita andaikan $T_1 = (u_1, v_1)$ serta normalnya sebagai $N_1 = (-v_1, u_1)$. Maka kita boleh tuliskan dua operasi vektor yang penting mengikut kes-kes perbezaan dua kelengkungan yang terlibat seperti bawah

Kes $\kappa_0 > \kappa_1$,

$$T_1 \wedge (C_1 - C_0) = |r_0 - r_1|, \quad N_1 \wedge (C_1 - C_0) = -\sqrt{\|C_1 - C_0\|^2 - (r_0 - r_1)^2}, \quad (22)$$

Kes $\kappa_0 < \kappa_1$,

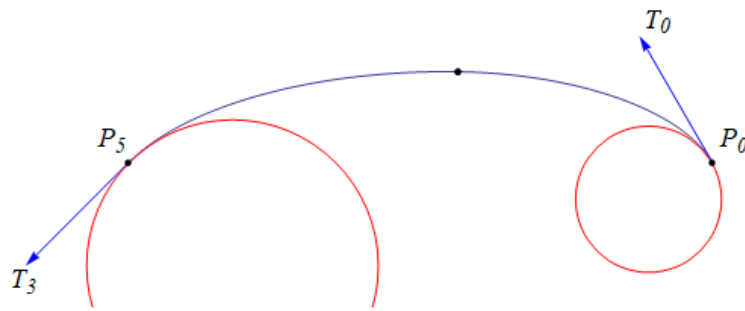
$$T_1 \wedge (C_1 - C_0) = -|r_0 - r_1|, \quad N_1 \wedge (C_1 - C_0) = -\sqrt{\|C_1 - C_0\|^2 - (r_0 - r_1)^2}. \quad (23)$$

Dengan menyelesaikan (22) atau (23) kita akan memperolehi u_1 dan v_1 yang unik seterusnya memberi kita T_1 . Langkah akhir bagi membina Z adalah dengan menentukan nilai-nilai m_0 dan m_1 daripada γ yang dipilih. Kita akan membincangkan bagaimana diperolehi dan apakah selang nilai γ yang sesuai untuk nilai m_0 dan m_1 .

Menentukan m_0 dan m_1 apabila $\gamma = 0$

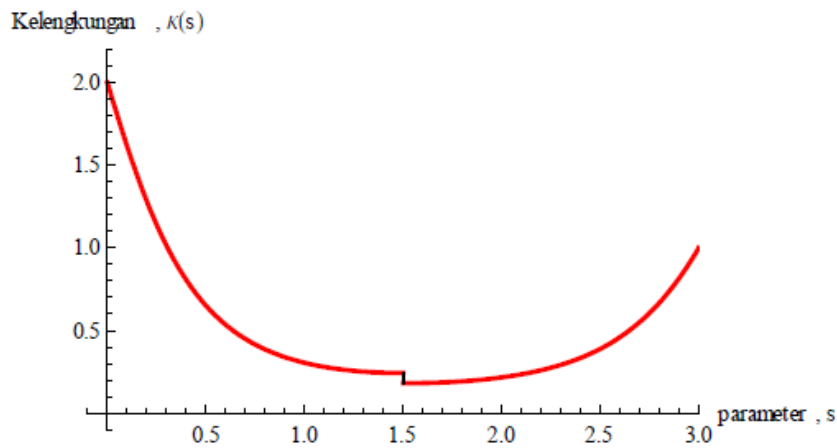
Secara geometri apabila $\gamma = 0$, ia bermaksud bahawa Z_1 adalah satu titik. Dengan kata lain $P_3 = P_2$ iaitu lengkung peralihan terdiri daripada Z_0 dan Z_2 sahaja tanpa segmen garis Z_1 . Kepelbagaian nilai skalar γ akan mempengaruhi nisbah panjang sisi poligon kuadratik Bezier m_0 dan m_1 .

Dengan menggantikan data interpolasi Hermite $\{P_0, T_0, \kappa_0\}$ dan $\{P_5, T_3, \kappa_1\}$ yang diberi serta T_1, θ, ϕ , yang diperolehi di atas kepada (20), kita akan memperolehi dua persamaan mengikut komponen x dan y yang taklinear dalam sebutan m_0 dan m_1 . Nilai kedua-duanya boleh diperolehi hanya apabila kita menyelesaikannya dengan menggunakan kaedah berangka seperti kaedah Newton dengan mengambil nilai permulaan $m_0 > 1$ dan $0 < m_1 < 1$. Jika kita tandakan hasil penyelesaiannya sebagai m_0^* dan m_1^* , maka dengan menggunakan nilai-nilai ini kita boleh membina Z setelah semua maklumat seperti w_0, w_1, P_1, P_2, P_3 dan P_4 diketahui. Rajah 2 di bawah menunjukkan satu contoh gambaran lengkungan Z yang hanya mengandungi dua pilin sahaja.



Rajah 2. Contoh Z dengan dua pilin Z_0 dan Z_2 .

Manakala Rajah 3 menunjukkan satu contoh profil kelengkungan keseluruhan lengkung peralihan yang dibina menggunakan gabungan dua pilin kuadratik nisbah Bezier bagi parameter $0 \leq s \leq 3$.



Rajah 3. Profil kelengkungan gabungan dua pilin.

Adalah jelas daripada rajah berkenaan, terdapat sedikit perbezaan nilai kelengkungan di antara dua pilin pada titik pertemuan antara kedua-duanya.

Menentukan m_0 dan m_1 apabila $\gamma \neq 0$

Apabila $\gamma \neq 0$ ini bermaksud bahawa Z_1 akan dijana sebagai satu segmen garis. Apa yang kita inginkan adalah nilai γ yang positif sahaja. Dengan cara yang sama seperti di atas, kita perlu mencari nilai m_0 dan m_1 terlebih dahulu sebelum γ boleh ditentukan. Langkah yang diambil adalah seperti berikut, biarkan kita mewakili titik-titik hujung dan vektor unit tangen seperti di bawah;

$$P_0 = (x_0, y_0), P_5 = (x_5, y_5), T_0 = (u_0, v_0), T_1 = (u_1, v_1), T_3 = (u_3, v_3). \quad (24)$$

Setelah (24) digantikan ke dalam persamaan (20), kita akan memperolehi dua persamaan mengikut komponen x dan y yang tak linear dalam sebutan m_0 , m_1 dan γ . Kita boleh menulis γ dalam sebutan m_0 dan m_1 yang diperolehi daripada komponen x , dan hasilnya adalah

$$\gamma = -\frac{1}{u_1} \left(-(x_5 - x_0) + \frac{(u_1 + m_1 u_3) \eta_1}{m_1^2 (1 + m_1 \lambda_1)} + \frac{m_0^2 (u_0 + m_0 u_1) \eta_2}{m_0 + \lambda_2} \right) \quad (25)$$

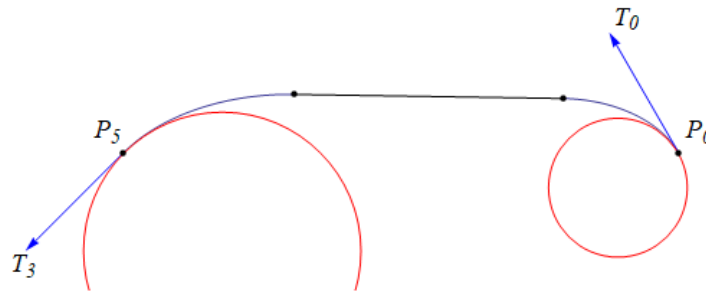
Seterusnya gabungan kedua-dua komponen x dan y melalui penghapusan γ , akan memberi kita persamaan kuadratik (26) yang menghubungkan m_0 dan m_1 .

$$m_1 (\lambda_1 m_1 + 1) (m_0 X + m_0^2 A \eta_2 + X \lambda_2) + \eta_1 B (m_0 + \lambda_2) = 0 \quad (26)$$

Di mana

$$A = T_0 \wedge T_1, \quad B = T_3 \wedge T_1, \quad X = T_1 \wedge (P_5 - P_0). \quad (27)$$

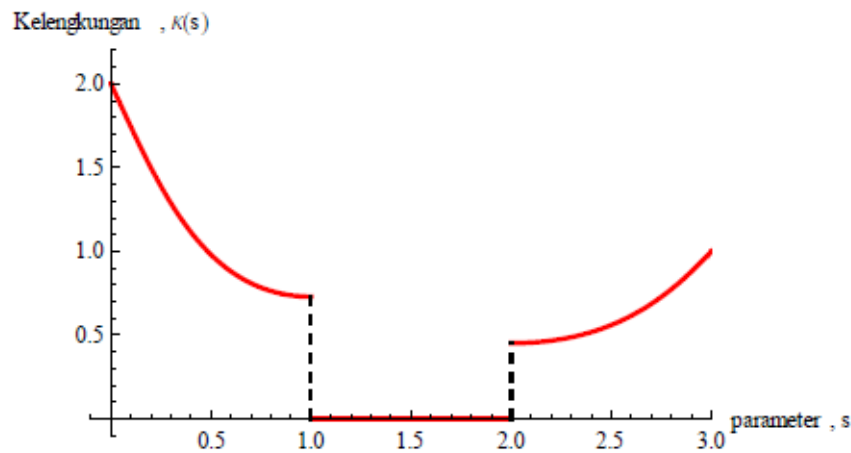
Oleh kerana $m_0 > 1$ dan $0 < m_1 < 1$ kedua-duanya adalah positif, maka m_1 boleh ditentukan dengan mudah daripada penyelesaian (27) iaitu berada dalam selang $[m_1^*, 1)$ setelah kita memilih m_0 daripada $(1, m_0^*]$. Sebagai ringkasan, pembinaan lengkungan peralihan dimulakan dengan menentukan T_1 daripada (22) atau (23), diikuti dengan mencari sudut-sudut putaran θ dan ϕ . Nilai m_0^* dan m_1^* diperolehi penyelesaian (20) apabila $\gamma = 0$. Akhirnya, dengan memilih m_0 daripada $(1, m_0^*]$, kita akan memperolehi m_1 . Rajah 4 menggambarkan satu contoh lengkungan peralihan yang dibina dengan menggunakan gabungan dua pilin dan satu segmen garis. Contoh berkenaan menggunakan data interpolasi Hermite $\{P_0, T_0, \kappa_0\}$ dan $\{P_5, T_3, \kappa_1\}$ yang sama sebagaimana pada Rajah 2.



Rajah 4. Contoh Z daripada gabungan dua pilin Z_0 , Z_2 dan segmen garis Z_1 .

Gambaran profil kelengkungan keseluruhan lengkungan peralihan yang dibina menggunakan gabungan dua pilin kuadratik nisbah Bezier bersama satu segmen garis lurus untuk contoh di atas ditunjukkan pada Rajah 5. Penjanaan lengkungan peralihan menggunakan bagi parameter $0 \leq s \leq 3$.

Berbanding dengan profil kelengkungan yang ditunjukkan pada Rajah 3, terdapat perbezaan kelengkungan yang lebih besar pada dua tempat pencantuman lengkungan dan garis. Hal ini menjadi kekurangan kepada rekabentuk lengkungan peralihan yang menggunakan tiga segmen lengkungan/garis. Walau bagaimanapun, panjang lengkungan peralihan untuk rekabentuk ini adalah lebih pendek apabila dibandingkan dengan lengkungan peralihan yang dibina menggunakan gabungan dua pilin.



Rajah 5. Profil kelengkungan gabungan dua pilin bersama satu segmen garis lurus.

KESIMPULAN

Kertas ini telah berjaya membincangkan satu teknik bagi membina secara terus satu lengkung peralihan berbentuk C yang memuakan data interpolasi Hermite G^2 yang diberi. Lengkungan peralihan yang dibina mempunyai gabungan dua pilin berasaskan lengkung kuadratik nisbah Bezier atau gabungan bersama satu segmen garis lurus dengan keselantaran G^1 . Hasil kajian memberi kita suatu selang nisbah panjang poligon kawalan yang kemudiannya membantu kita untuk menentukan kesemua titik-titik kawalan yang terlibat berserta pemberat-pemberat pertengahan bagi lengkung kuadratik nisbah tersebut. Dengan teknik ini kita mampu membina satu keluarga lengkung peralihan dalam batas-batas tertentu. Oleh kerana perwakilan nisbah Bezier ini adalah sebahagian daripada perwakilan NURBs yang menjadi perwakilan geometri utama dalam kebanyakan perisian geometri komputer masa kini, maka hasil kajian ini dapat memberi nilai tambah di dalam aplikasi pembinaan dan pengawalan lengkung yang berkaitan. Penyelidik yakin bahawa teknik yang serupa dapat digunapakai bagi pembinaan lengkung peralihan berbentuk S serta boleh digunakan bagi pembinaan lengkung peralihan dengan perwakilan nisbah Bezier yang lain. Yang demikian itu adalah matlamat penyelidik dalam kajian selanjutnya.

RUJUKAN

- Abramov, A., Bayer, C., Heller, C., & Loy, C. (2017). A flexible modeling approach for robust multi-lane road estimation. In 2017 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV) (pp. 1386-1392). IEEE.
- Ahmad, A., & Ali, J. M. (2010). Planar transition curves using Quartic Bezier Spiral. *Journal of Science and Mathematics Letters*, 2(1), 78-85.
- Ahmad, A., & Ali, J. M. (2013). Smooth transition curve by planar Bézier quartic. *Sains Malaysiana*, 42(7), 989-997.
- Ahmad, A., & Gobithaasan, R. U. (2018). Rational quadratic Bézier Spirals. *Sains Malaysiana*, 47(9), 2205-2211.
- Ahn, Y. J., & Kim, H. O. (1998). Curvatures of the quadratic rational Bézier curves. *Computers & Mathematics with Applications*, 36(9), 71-83.
- Alexandrov, V. N., van Albada, G. D., Sloot, P. M., & Dongarra, J. J. (Eds.). (2006). Computational Science-ICCS 2006: 6th International Conference, Reading, UK, May 28-31, 2006, Proceedings. Springer Science & Business Media.

- Farin, G. (2014). *Curves and surfaces for computer-aided geometric design: a practical guide*. Elsevier.
- Frey, W. H., & Field, D. A. (2000). Designing Bézier conic segments with monotone curvature. *Computer Aided Geometric Design*, 17(6), 457-483.
- Fritsch, F. N., & Carlson, R. E. (1980). Monotone piecewise cubic interpolation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 17(2), 238-246.
- Habib, Z., & Sakai, M. (2003). G^2 planar cubic transition between two circles. *International Journal of Computer Mathematics*, 80(8), 957-965.
- Habib, Z., & Sakai, M. (2007). G^2 Pythagorean hodograph quintic transition between two circles with shape control. *Computer Aided Geometric Design*, 24(5), 252-266.
- Habib, Z., & Sakai, M. (2009). G^2 cubic transition between two circles with shape control. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 223(1), 133-144.
- Kobryń, A., & Stachera, P. (2019). S-Shaped transition curves as an element of reverse curves in road design. *The Baltic Journal of Road and Bridge Engineering*, 14(4), 484-503.
- Lee, E. T. (1987). The rational Bézier representation for conics. *Geometric modeling*, 3.
- Li, Z., Ma, L., Zhao, M., & Mao, Z. (2006). Improvement construction for planar G^2 transition curve between two separated circles. In *International Conference on Computational Science* (pp. 358-361). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Sapidis, N. S., & Frey, W. H. (1992). Controlling the curvature of a quadratic Bézier curve. *Computer Aided Geometric Design*, 9(2), 85-91.
- Sederberg, T. W. (2012). *Computer aided geometric design*. Retrieved from <https://scholarsarchive.byu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1000&context=facpub>
- Walton, D. J., & Meek, D. S. (2013). G^2 curve design with planar quadratic rational Bézier spiral segments. *International Journal of Computer Mathematics*, 90(2), 325-340.
- Yahaya, S. H., Ali, J. M., & Fauadi, M. H. F. M. (2008). A product design using an S-shaped and C-shaped transition curves. In *2008 Fifth International Conference on Computer Graphics, Imaging and Visualisation* (pp. 149-153). IEEE.
- Zboinski, K., & Woźnica, P. (2019). The Optimization of Railway Transition Curves with an Emphasis on Initial and End Zones. In *International Scientific Conference Transport of the 21st Century* (pp. 476-483). Springer, Cham.
- Ziatdinov, R., Yoshida, N., & Kim, T. W. (2012). Fitting G^2 multispiral transition curve joining two straight lines. *Computer-Aided Design*, 44(6), 591-596.